~ CURS 8 ~

C. Sistemele trifazate pot funcționa în una din următoarele conexiuni:

- în conexiune stea, obținută prin legarea sfârșitului celor trei faze la un același punct numit neutru sau nul;
- în conexiune triunghi, realizată prin legarea sfârșitului fiecărei faze la începutul fazei următoare;

Calculul circuitelor electrice trifazate constă, în general, în determinarea curenților de fază și de linie, cunoscând valorile tensiunilor de alimentare (de fază sau de linie), respectiv ale impedanțelor de pe fiecare fază.

C1. Analiza circuitelor trifazate în conexiune stea

În cazul cel mai general, schema unui circuit trifazat în conexiune stea este reprezentat în figura 1,52. Denumirea mărimilor este specifică sistemelor trifazate, după cum urmează:

$\underline{U}_{10}$, $\underline{U}_{20}$, $\underline{U}_{30}$ – tensiunile de fază la generator;

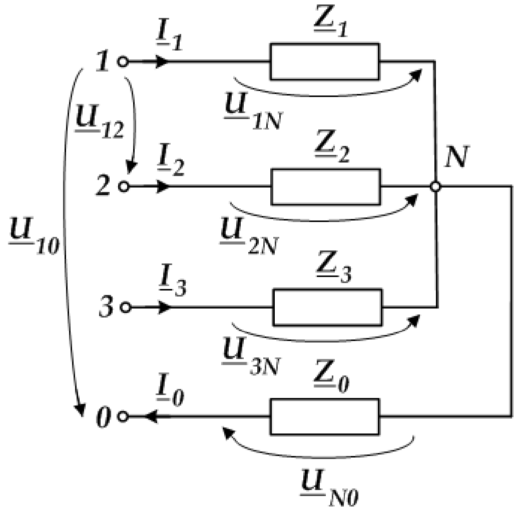
$\underline{U}_{1N}$, $\underline{U}_{2N}$, $\underline{U}_{3N}$ – tensiunile de fază la receptor;

$\underline{U}_{12}$, $\underline{U}_{23}$, $\underline{U}_{31}$ – tensiunile de linie (între faze);

$\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$ – curenții de linie (egali cu cei de fază în cazul acestei conexiuni);

$\underline{U}_{N0}$ – tensiunea de deplasare a nulului;

$\underline{I}_0$ – curentul de pe firul neutru.



$$\underline{U}_{10} = U_f \cdot e^{j\cdot\varphi}$$
$$\underline{U}_{20} = a^2 \cdot \underline{U}_1$$
$$\underline{U}_{30} = a \cdot \underline{U}_1$$

Fig. 1,52. Conexiune stea

a) când $\underline{Z}_0 \neq 0$ (conexiunea stea cu conductor neutru cu impedanță):

Aplicând prima teoremă a lui Kirchhoff în nodul *N* se obține:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 - \underline{I}_0 = 0,$$

în care fiecare curent este substituit pe baza legii lui Ohm:

$$\underline{Y}_1 \cdot \underline{U}_{10} + \underline{Y}_2 \cdot \underline{U}_{20} + \underline{Y}_3 \cdot \underline{U}_{30} - \underline{U}_{N0}(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_0 = 0)$$

Din această relație se poate determina valoarea tensiunii de deplasare a nulului (*formula lui Millman*):

$$\underline{U}_{N0} = \frac{\underline{Y}_1 \cdot \underline{U}_{10} + \underline{Y}_2 \cdot \underline{U}_{20} + \underline{Y}_3 \cdot \underline{U}_{30}}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_0} \tag{1.95}$$

După determinarea lui $\underline{U}_{N0}$, curenții prin circuit (de linie, respectiv de pe firul neutru) se determină cu ajutorul relațiilor lui Ohm pe fiecare impedanță în parte:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{1N}}{\underline{Z}_1} = \underline{Y}_1(\underline{U}_{10} - \underline{U}_{N0}) \qquad \underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{3N}}{\underline{Z}_3} = \underline{Y}_3(\underline{U}_{30} - \underline{U}_{N0})$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{2N}}{\underline{Z}_2} = \underline{Y}_2(\underline{U}_{20} - \underline{U}_{N0}) \qquad \underline{I}_0 = \frac{\underline{U}_{N0}}{\underline{Z}_0} = \underline{Y}_0 \cdot \underline{U}_{N0}$$

b) când $\underline{Z}_0 \to \infty$ (conexiunea stea fără conductor neutru):

Se ajunge la formula lui Millman în care $\underline{Y}_0 = 0$

$$\Rightarrow \underline{U}_{N0} = \frac{\underline{Y}_1 \cdot \underline{U}_{10} + \underline{Y}_2 \cdot \underline{U}_{20} + \underline{Y}_3 \cdot \underline{U}_{30}}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}$$

Curenții pe fază se calculează ca la punctul anterior.

c) când $\underline{Z}_0 = 0$ (conexiunea stea cu conductor neutru cu impedanță nulă), generează următoarele relații de calcul:

$$\underline{U}_{N0} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{U}_{10} = \underline{U}_{1N} \Rightarrow \underline{I}_1 = \dfrac{\underline{U}_{10}}{\underline{Z}_1} \\ \underline{U}_{20} = \underline{U}_{2N} \Rightarrow \underline{I}_2 = \dfrac{\underline{U}_{20}}{\underline{Z}_2} \\ \underline{U}_{30} = \underline{U}_{3N} \Rightarrow \underline{I}_3 = \dfrac{\underline{U}_{30}}{\underline{Z}_3} \end{cases}$$

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$$

<u>C2. Analiza circuitelor trifazate în conexiune triunghi</u>

Circuitul trifazat în conexiunea triunghi (fig. 1.53) are următoarele mărimi specifice:

$\underline{U}_{12}$, $\underline{U}_{23}$, $\underline{U}_{31}$ – tensiunile de linie (egale cu cele de fază în cazul acestei conexiuni);

$\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$ – curenții de linie;

$\underline{I}_{12}$, $\underline{I}_{23}$, $\underline{I}_{31}$ – curenții de fază;

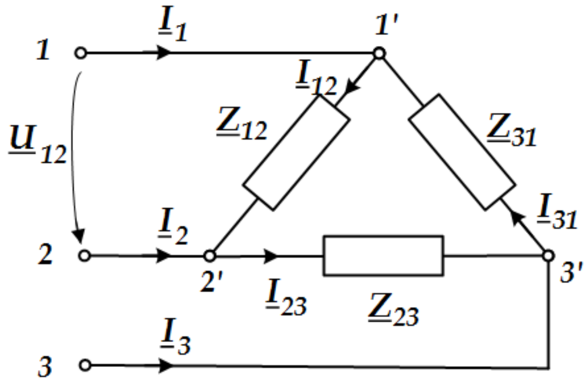


Fig. 1.53. Conexiune triunghi

$$\underline{U}_{12} = U \cdot e^{j\cdot\varphi}$$

$$\underline{U}_{23} = U \cdot e^{j(\varphi - \frac{2\pi}{3})} = a^2 \cdot \underline{U}_{12}$$

$$\underline{U}_{31} = U \cdot e^{j(\varphi + \frac{2\pi}{3})} = a \cdot \underline{U}_{12}$$

În cazul acestei conexiuni, tensiunile de fază sunt egale cu cele de linie, deci curenții de fază pot fi determinați cu ajutorul legii lui Ohm:

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}} \qquad \underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_{23}} \qquad \underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_{31}},$$

iar curenții de linie se calculează cu ajutorul primei teoreme a lui Kirchhoff:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} \qquad \underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} \qquad \underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23}$$

D. Puteri în circuitelor trifazate

Fie un cuadripol reprezentat de un receptor trifazat (fig. 1.54) pentru care putem defini următoarele puteri:

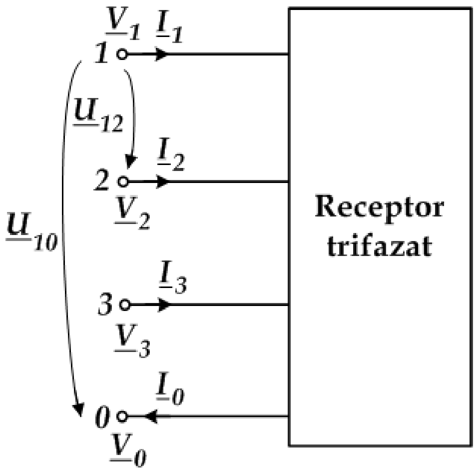


Fig. 1.54. Puteri în circuite trifazate

$$\left.\begin{array}{l} \underline{S}_g = \underline{V}_1 \cdot \underline{I}_1^* + \underline{V}_2 \cdot \underline{I}_2^* + \underline{V}_3 \cdot \underline{I}_3^* + \underline{V}_0(-\underline{I}_0^*) \\ \text{Dar } \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = \underline{I}_0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{S}_g = (\underline{V}_1 - \underline{V}_0) \cdot \underline{I}_1^* + (\underline{V}_2 - \underline{V}_0) \cdot \underline{I}_2^* + (\underline{V}_3 - \underline{V}_0) \cdot \underline{I}_3^* =$$
$$= \underline{U}_{10} \cdot \underline{I}_1^* + \underline{U}_{20} \cdot \underline{I}_2^* + \underline{U}_{30} \cdot \underline{I}_3^*$$

Sistemul este dezechilibrat, deci:

$$\begin{array}{lll} \{\underline{U}_{10} = U_1 \cdot e^{j\cdot\alpha_1} & \underline{U}_{20} = U_2 \cdot e^{j\cdot\alpha_2} & \underline{U}_{30} = U_3 \cdot e^{j\cdot\alpha_2} \\ \{\underline{I}_1 = I_1 \cdot e^{j\cdot\beta_1} & \underline{I}_2 = I_2 \cdot e^{j\cdot\beta_2} & \underline{I}_3 = I_3 \cdot e^{j\cdot\beta_3} \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{S}_g = U_{10} \cdot I_1 \cdot e^{j\cdot\varphi_1} + U_{20} \cdot I_2 \cdot e^{j\cdot\varphi_2} + U_{30} \cdot I_3 \cdot e^{j\cdot\varphi_3}, \text{ unde } \varphi_j = \alpha_j - \beta_j$$

Partea reală a puterii complexe reprezintă puterea activă trifazată furnizată receptorului:

$$P_g = \mathrm{Re}\{\underline{S}_g\} = U_{10} \cdot I_1 \cdot \cos\varphi_1 + U_{20} \cdot I_2 \cdot \cos\varphi_2 + U_{30} \cdot I_3 \cdot \cos\varphi_3$$

Partea imaginară a puterii complexe este puterea reactivă trifazată furnizată receptorului:

$$Q_g = \mathrm{Im}\{\underline{S}_g\} = U_{10} \cdot I_1 \cdot \sin\varphi_1 + U_{20} \cdot I_2 \cdot \sin\varphi_2 + U_{30} \cdot I_3 \cdot \sin\varphi_3$$

În afara acestor puteri definite la bornele receptorului, se mai pot exprima puterile consumate în elementele rezistive și reactive ale circuitului:

$$\underline{S}_C = \underline{Z}_1 \cdot I_1^2 + \underline{Z}_2 \cdot I_2^2 + \underline{Z}_3 \cdot I_3^2 + \underline{Z}_0 \cdot I_0^2 = \sum_{k=0}^{3} R_k \cdot I_k^2 + j \sum_{k=0}^{3} X_k \cdot I_k^2,$$

unde:
$$P_C = \mathrm{Re}\{\underline{S}_C\} = \sum_{k=0}^{3} R_k \cdot I_k^2$$

$$Q_C = \mathrm{Im}\{\underline{S}_C\} = \sum_{k=0}^{3} X_k \cdot I_k^2 = \sum_{k=0}^{3} (X_{L_k} - X_{C_k}) I_k^2$$

<u>Puteri în sisteme trifazate în regim simetric și echilibrate</u>

Dacă sistemul tensiunilor de alimentare ale unui receptor trifazat echilibrat în conexiune stea au conductor neutru este simetric de succesiune directă:

$$u_{10}(t) = \sqrt{2} \cdot U_f \sin(\omega t + \alpha) \Rightarrow \underline{U}_{10} = U_f \cdot e^{j \cdot \alpha}$$

$$u_{20}(t) = \sqrt{2} \cdot U_f \sin(\omega t + \alpha - \frac{2\pi}{3}) \Rightarrow \underline{U}_{20} = U_f \cdot e^{j \cdot (\alpha - \frac{2\pi}{3})} = a^2 \cdot \underline{U}_{10}$$

$$u_{30}(t) = \sqrt{2} \cdot U_f \sin(\omega t + \alpha + \frac{2\pi}{3}) \Rightarrow \underline{U}_{30} = U_f \cdot e^{j \cdot (\alpha + \frac{2\pi}{3})} = a \cdot \underline{U}_{10}$$

și sistemul curenților este de succesiune directă:

$$i_1(t) = \sqrt{2} \cdot I_f \sin(\omega t + \beta) \Rightarrow \underline{I}_1 = I_f \cdot e^{j \cdot \beta}$$

$$i_2(t) = \sqrt{2} \cdot I_f \sin(\omega t + \beta - \frac{2\pi}{3}) \Rightarrow \underline{I}_2 = I_f \cdot e^{j \cdot (\beta - \frac{2\pi}{3})} = a^2 \cdot \underline{I}_1$$

$$i_3(t) = \sqrt{2} \cdot I_f \sin(\omega t + \beta + \frac{2\pi}{3}) \Rightarrow \underline{I}_3 = I_f \cdot e^{j \cdot (\beta + \frac{2\pi}{3})} = a \cdot \underline{I}_1$$

Puterea instantanee totală este:

$$p = u_{10} \cdot i_1 + u_{20} \cdot i_2 + u_{30} \cdot i_3 = 3 \cdot U_f \cdot I_f \cdot \cos\varphi$$

Puterea complexă trifazată transmisă receptorului este:

$$\underline{S}_g = \underline{U}_{10} \cdot \underline{I}_1^* + \underline{U}_{20} \cdot \underline{I}_2^* + \underline{U}_{30} \cdot \underline{I}_3^* =$$
$$= U_f \cdot e^{j \cdot \alpha} I_f \cdot e^{-j \cdot \beta} + U_f \cdot e^{j \cdot \alpha} \cdot a^2 \cdot I_f \cdot e^{-j \cdot \beta} \cdot a + U_f \cdot e^{j \cdot \alpha} \cdot a \cdot I_f \cdot e^{-j \cdot \beta} \cdot a^2$$

- conexiunea stea: $\begin{cases} U_l = \sqrt{3} \cdot U_f \\ I_l = I_f \end{cases} \Rightarrow U_l \cdot I_l = \sqrt{3} \cdot U_f \cdot I_f$

- conexiunea triunghi: $\begin{cases} U_l = U_f \\ I_l = \sqrt{3} \cdot I_f \end{cases} \Rightarrow U_l \cdot I_l = \sqrt{3} \cdot U_f \cdot I_f$

$$\Rightarrow \underline{S}_g = \sqrt{3} \cdot U_l \cdot I_l \cdot e^{j \cdot \varphi}$$

Atunci puterile active și reactive sunt:

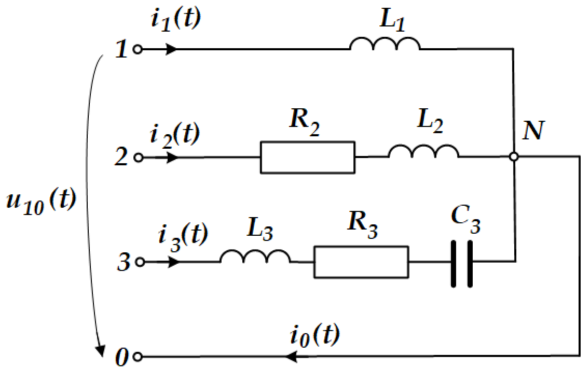
$$P_g = 3 \cdot U_f \cdot I_f \cdot \cos\varphi = \sqrt{3} \cdot U_l \cdot I_l \cdot \cos\varphi$$
$$Q_g = 3 \cdot U_f \cdot I_f \cdot \sin\varphi = \sqrt{3} \cdot U_l \cdot I_l \cdot \sin\varphi$$

Factorul de putere pentru un circuit trifazat în regim simetric se definește cu relația:

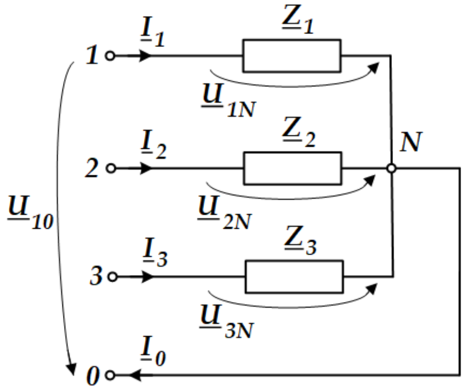
$$K = \cos\varphi = \frac{P_g}{S_g}$$

E. Aplicații circuite trifazate

P1. Se consideră următoarele date pentru circuitul trifazat în conexiune stea, alimentat de la un sistem de tensiuni simetrice de succesiune inversă: $u_{10}(t) = 22\sqrt{2}\sin(\omega t)$ [V], $L_1 = 10\,mH$, $L_2 = 10\sqrt{3}\,mH$, $L_3 = 20\,mH$, $R_2 = 1\,\Omega$, $R_3 = \sqrt{3}\,\Omega$, $C_3 = 10\,mF$, $\omega = 100\,rad/s$. Să se afle intensitățile curenților de linie și să se verifice bilanțul puterilor.



Și circuitele trifazate se rezolvă tot prin metoda transformării în complex, fiind circuite de regim permanent sinusoidal.



Tensiunile fiind simetrice de succesiune directă, avem:

$$\underline{U}_{10} = 22e^{j0} = 22,$$

$$\underline{U}_{20} = a^2\underline{U}_{10} = 22 \cdot \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\underline{U}_{30} = a\underline{U}_{10} = 22 \cdot \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\underline{Z}_1 = j\omega L_1 = j,$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2 = 1 + \sqrt{3}j,$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 + j\omega L_3 - \frac{j}{\omega C_3} = \sqrt{3} + j$$

$$\underline{Z}_0 = 0 \Rightarrow \underline{U}_{N0} = 0$$

Se scrie teorema Kirchhoff II pe bucla 1-N-0-1:

$$\underline{U}_{1N} + \underline{U}_{N0} = \underline{U}_{10} \Rightarrow \underline{U}_{1N} = \underline{U}_{10}, \text{ dar}$$

$$\underline{U}_{1N} = \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 \Rightarrow \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{1N}}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{U}_{10}}{\underline{Z}_1} = \frac{22}{j} = -22j$$

Analog: $\underline{U}_{2N} + \underline{U}_{N0} = \underline{U}_{20} \Rightarrow \underline{U}_{2N} = \underline{U}_{20}$,

$$\underline{U}_{2N} = \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2 \Rightarrow \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{2N}}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{U}_{20}}{\underline{Z}_2} = \frac{-11 - 11\sqrt{3}j}{1 + \sqrt{3}j} = -11, \text{ deci}$$

Analog: $\underline{U}_{3N} + \underline{U}_{N0} = \underline{U}_{30} \Rightarrow \underline{U}_{3N} = \underline{U}_{30}$

$$\underline{U}_{3N} = \underline{Z}_3 \cdot \underline{I}_3 \Rightarrow \underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{3N}}{\underline{Z}_3} = \frac{\underline{U}_{30}}{\underline{Z}_3} = \frac{-11 + 11\sqrt{3}j}{\sqrt{3} + j} = 11j \Rightarrow$$

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = -22j - 11 + 11j = -11 - 11j \Rightarrow$$

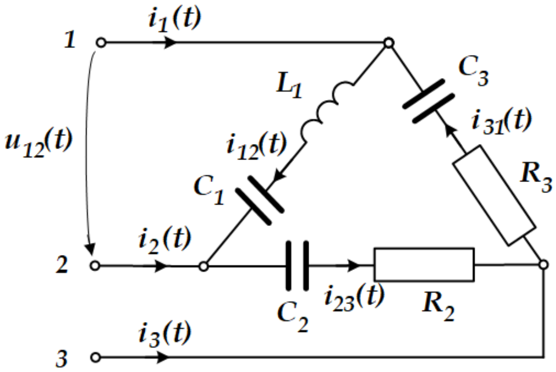
<u>Bilanțul puterilor</u>:

$$P_c = \mathrm{Re}\{\underline{Z}_1\} \cdot I_1^2 + \mathrm{Re}\{\underline{Z}_2\} \cdot I_2^2 + \mathrm{Re}\{\underline{Z}_3\} \cdot I_3^2 = 0 + 1 \cdot 11^2 + \sqrt{3} \cdot 11^2 = 121(1+\sqrt{3})\,(W)$$

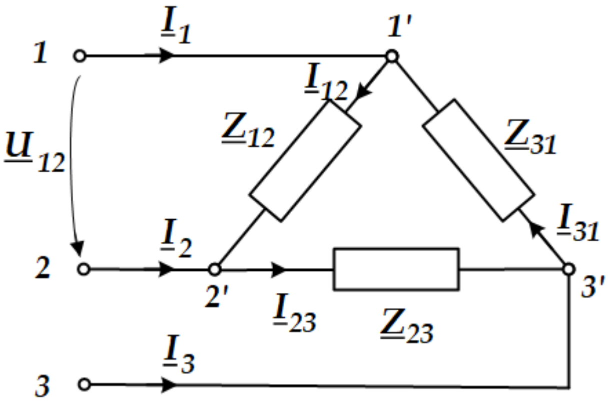
$$Q_c = \mathrm{Im}\{\underline{Z}_1\} \cdot I_1^2 + \mathrm{Im}\{\underline{Z}_2\} \cdot I_2^2 + \mathrm{Im}\{\underline{Z}_3\} \cdot I_3^2 = 1 \cdot 22^2 + \sqrt{3} \cdot 11^2 + 1 \cdot 11^2 = 605 + 121\sqrt{3}\,(Var)$$

$$\underline{S}_g = \underline{U}_{10} \cdot \underline{I}_1^* + \underline{U}_{20} \cdot \underline{I}_2^* + \underline{U}_{30} \cdot \underline{I}_3^* = 22 \cdot 22j + 11(1+\sqrt{3}j) \cdot 11 +$$
$$+ 11(1-\sqrt{3}j) \cdot 11j = 121 + 121\sqrt{3} + (605 + 121\sqrt{3})j$$

<u>P2</u>. Se consideră următoarele date pentru circuitul trifazat în conexiune triunghi, alimentat de la un sistem de tensiuni simetrice de succesiune inversă: $u_{10}(t) = 38\sqrt{2}\sin(\omega t)$ [V], $L_1 = \frac{10}{\pi} mH$, $C_1 = \frac{10}{3\pi} mF$, $R_2 = \sqrt{3}\ \Omega$, $C_3 = \frac{10}{\pi} mF$, $R_3 = 1\ \Omega$, $C_3 = \frac{10}{\sqrt{3}\pi} mF$, $f = 50\,Hz$. Să se afle intensitățile curenților de fază, de linie și să se verifice bilanțul puterilor.



Transformarea în complex:



Tensiunile fiind simetrice de succesiune directă, avem:

$$\underline{U}_{12} = 38e^{j0} = 38,$$
$$\underline{U}_{23} = a^2\underline{U}_{12} = 19\cdot\left(-1 - j\sqrt{3}\right),$$
$$\underline{U}_{31} = a\underline{U}_{12} = 19\cdot\left(-1 + j\sqrt{3}\right)$$

$$\underline{Z}_{12} = j\omega L_1 - \frac{j}{\omega C_1} = j - 3j = -2j,$$
$$\underline{Z}_{23} = R_2 - \frac{j}{\omega C_2} = \sqrt{3} + j,$$
$$\underline{Z}_{31} = R_3 - \frac{j}{\omega C_3} = 1 - j\sqrt{3}$$

În conexiune triunghi, deoarece tensiunile de fază sunt egale cu cele de linie, putem calcul imediat curenții de fază:

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}} = \frac{38}{-2j} = 19j$$
$$\underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_{23}} = \frac{19\left(-1 - j\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3} + j} = -19j$$
$$\underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_{31}} = \frac{19\left(-1 + j\sqrt{3}\right)}{1 - j\sqrt{3}} = -19$$

Curenții de linie, se calculează aplicând teorema întâi a lui Kirchhoff în nodurile triunghiului (1', 2', respectiv 3'):

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} = 19 + 19j$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} = -38j$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23} = -19 + 19j$$

Bilanțul puterilor:

$$P_c = \mathrm{Re}\{\underline{Z}_{12}\}\cdot I_{21}^2 + \mathrm{Re}\{\underline{Z}_{23}\}\cdot I_{23}^2 + \mathrm{Re}\{\underline{Z}_{31}\}\cdot I_{31}^2 = 0 + \sqrt{3}\cdot 19^2 + 1\cdot 19^2 = 361(1+\sqrt{3})\,(\mathrm{W})$$

$$Q_c = \mathrm{Im}\{\underline{Z}_{12}\}\cdot I_{12}^2 + \mathrm{Im}\{\underline{Z}_{23}\}\cdot I_{23}^2 + \mathrm{Im}\{\underline{Z}_{31}\}\cdot I_{31}^2 = -2\cdot 19^2 - 1\cdot 19^2 - \sqrt{3}\cdot 19^2 =$$
$$= 361\left(-3 - \sqrt{3}\right)(Var)$$

$$\underline{S}_g = \underline{U}_{12}\cdot \underline{I}_{12}^* + \underline{U}_{23}\cdot \underline{I}_{23}^* + \underline{U}_{31}\cdot \underline{I}_{31}^* = 38\cdot(-19j) + 19(-1-\sqrt{3}j)\cdot(19j) +$$
$$+ 19(-1-\sqrt{3}j)\cdot(-19) = 361(1+\sqrt{3}) + 361\left(-3-\sqrt{3}\right)j$$